

УДК 539.3

В. В. ЧИГИРИНСКИЙ, В. А. БРЕНЕР, Е. Г. НАУМЕНКО**АНАЛИЗ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ЗАДАЧИ МЕХАНИКИ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ**

Статья посвящена выявлению обобщенных подходов для формулировки граничных условий применительно к задачам механики сплошной среды. На базе уравнений равновесия элементарного тетраэдра рассмотрены выражения для определения контактных напряжений. Для решения задач теории пластичности удобно использовать контактные касательные напряжения наклонной площадки в виде граничных условий. Показаны возможности их применения для объемных задач механики сплошной среды в аналитическом виде. Удалось перегруппировать достаточно громоздкие выражения таким образом, чтобы обозначились суммы и разности квадратов. Получены аналитические выражения для определения контактных касательных напряжений объемной задачи. При подстановке соответствующих значений углов выражения приводятся к известным формулам. Это позволило получить некоторые обобщения, обозначить возможность непосредственного анализа, и упростить нахождение решений дифференциальных уравнений в частных производных для пространственных задач механики сплошной среды.

Ключевые слова: граничные условия, пространственная задача, обобщенные подходы, тензор напряжений, механика сплошной среды.

В. В. ЧИГИРИНСЬКИЙ, В. О. БРЕНЕР, О. Г. НАУМЕНКО**АНАЛІЗ ГРАНИЧНИХ УМОВ ПРОСТОРОВОЇ ЗАДАЧИ МЕХАНІКИ СУЦІЛЬНОГО СЕРЕДОВИЩА**

Стаття присвячена виявленню узагальнених підходів для формулювання граничних умов стосовно задач механіки суцільного середовища. На базі рівнянь рівноваги елементарного тетраедра розглянуті вирази для визначення контактних напружень. Для вирішення задач теорії пластичності зручно використовувати контактні дотичні напруження похилої площадки у вигляді граничних умов. Наведені можливості їх застосування для об'ємних задач механіки суцільного середовища в аналітичному виді. Вдалось перегрупувати досить громіздкі вирази, отримав суми та різниці квадратів. Отримано аналітичні вирази для визначення контактних дотичних напружень об'ємної задачі. При підстановці відповідних значень кутів вирази приводяться до відомих формул механіки. Це дозволило отримати деякі узагальнення, встановити можливість безпосереднього аналізу та спростити знаходження рішень диференціальних рівнянь в часткових похідних для просторових задач механіки суцільного середовища.

Ключові слова: граничні умови, просторова задача, узагальнені підходи, тензор напружень, механіка суцільного середовища.

V. V. CHIGIRINSKY, V. A. BRENER, E. G. NAUMENKO**THE ANALYSIS OF BOUNDARY CONDITIONS IN SPATIAL PROBLEM OF CONTINUUM MECHANICS**

The article is devoted to the identification of generalized approaches for the formulation of boundary conditions related to problems of continuum mechanics. Based on equilibrium equations of elementary tetrahedron the expressions for determination of contact shear stresses are considered. To solve a problem of the theory of plasticity it is preferable to use the contact shear stresses on oblique planes as boundary conditions. Possibilities of their application in spatial problem of continuum mechanics in an analytical form are given. It was succeeded to regroup cluttered appearance so that sums and differences of squares were designated. Analytical expressions for determining the contact shear stresses of volumetric problem are given. It is shown that substitution of the corresponding values of the angles of expression is reduced to well-known formulas. It allowed to get some generalizations, to emphasise a possibility of direct analysis, and to simplify solving the partial differential equations in the spatial problems of continuum mechanics.

Key words: boundary conditions, spatial problem, generalized approaches, stress tensor, continuum mechanics.

Введение. При решении задач теории пластичности, упругости, динамических задач необходимо знать краевые условия, более конкретно граничные условия, которые для многих процессов обработки металлов давлением, теории упругости являются неизвестными зависимостями. Выявление обобщающих закономерностей, позволяющих упростить решение системы дифференциальных уравнений, не в ущерб качеству полученного результата, представляется одной из первоочередных задач механики сплошной среды. Известно, что граничные условия задаются в напряжениях, перемещениях, также имеют место комбинированные граничные условия, [1]...[4]. В данном случае анализ граничных условий рассматривается в напряжениях. При этом используются известные из литературы зависимости и подходы, сформулированные классиками теории

пластичности и упругости. Граничные условия, на базе уравнений равновесия, представляют собой аналитические выражения, связывающие компоненты тензора напряжений с контактными силовыми характеристиками упругого или пластического деформирования.

Цель и постановка задачи. Целью работы является выявление обобщенных подходов для формулировки граничных условий применительно к задачам механики сплошной среды. Определение математических зависимостей, связывающих компоненты тензора напряжений с контактными силовыми характеристиками для плоской и пространственной задач механики деформированного твердого тела.

Описание полученных результатов. Рассматривается наклонная плоскость, к которой приложены внешние силы и взаимно

перпендикулярные площадки, где действуют внутренние силы, определяемые компонентами тензора напряжений. При выводе будем придерживаться подходов изложенных в работах [5],[6]. Записывая уравнения равновесия для тетраэдра, имеем

$$\begin{aligned}\sigma_x \cdot \cos(n, x) + \tau_{xy} \cdot \cos(n, y) + \tau_{xz} \cdot \cos(n, z) &= p_{nx}; \\ \tau_{yx} \cdot \cos(n, x) + \sigma_y \cdot \cos(n, y) + \tau_{yz} \cdot \cos(n, z) &= p_{ny}; \\ \tau_{zx} \cdot \cos(n, x) + \tau_{zy} \cdot \cos(n, y) + \sigma_z \cdot \cos(n, z) &= p_{nz},\end{aligned}$$

где σ, τ – нормальные и касательные напряжения, приложенные к взаимно перпендикулярным площадкам;

p_{nx}, p_{ny}, p_{nz} – составляющие полного напряжения, действующего в наклонной площадке по координатным осям.

$$\text{При этом } p = \sqrt{p_{nx}^2 + p_{ny}^2 + p_{nz}^2};$$

$$\begin{aligned}\sigma_n &= p_{nx} \cdot \cos(n, x) + p_{ny} \cdot \cos(n, y) + p_{nz} \cdot \cos(n, z); \\ \tau_n^2 &= p^2 - \sigma_n^2,\end{aligned}$$

где p, σ_n, τ_n – полное, нормальное и касательное напряжения наклонной площадки.

Введем обозначения для направляющих косинусов

$$a_x = \cos(n, x); a_y = \cos(n, y); a_z = \cos(n, z);$$

при этом

$$a_x^2 + a_y^2 + a_z^2 = 1.$$

С учетом обозначений можно записать

$$\begin{aligned}\sigma_x \cdot a_x + \tau_{xy} \cdot a_y + \tau_{xz} \cdot a_z &= p_{nx}; \\ \tau_{yx} \cdot a_x + \sigma_y \cdot a_y + \tau_{yz} \cdot a_z &= p_{ny}; \\ \tau_{zx} \cdot a_x + \tau_{zy} \cdot a_y + \sigma_z \cdot a_z &= p_{nz};\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma_n &= p_{nx} \cdot a_x + p_{ny} \cdot a_y + p_{nz} \cdot a_z = \\ &= \sigma_x \cdot a_x^2 + \tau_{xy} \cdot a_y \cdot a_x + \tau_{xz} \cdot a_z \cdot a_x + \tau_{yx} \cdot a_x \cdot a_y + \sigma_y \cdot a_y^2 + \\ &+ \tau_{yz} \cdot a_z \cdot a_y + \tau_{zx} \cdot a_x \cdot a_z + \tau_{zy} \cdot a_y \cdot a_z + \sigma_z \cdot a_z^2 = \\ &= \sigma_x \cdot a_x^2 + (\tau_{xy} + \tau_{yx}) \cdot a_y \cdot a_x + (\tau_{xz} + \tau_{zx}) \cdot a_z \cdot a_x + \\ &+ (\tau_{yz} + \tau_{zy}) \cdot a_z \cdot a_y + \sigma_y \cdot a_y^2 + \sigma_z \cdot a_z^2.\end{aligned}$$

Квадраты составляющих и нормального напряжения

$$\begin{aligned}p_{nx}^2 &= [(\sigma_x \cdot a_x)^2 + (\tau_{xy} \cdot a_y)^2 + (\tau_{xz} \cdot a_z)^2 + 2 \cdot (\sigma_x \cdot a_x) \cdot (\tau_{xy} \cdot a_y) + 2 \cdot (\sigma_x \cdot a_x) \cdot (\tau_{xz} \cdot a_z) + 2 \cdot (\tau_{xz} \cdot a_z) \cdot (\tau_{xy} \cdot a_y)] \\ p_{ny}^2 &= [(\tau_{yx} \cdot a_x)^2 + (\sigma_y \cdot a_y)^2 + (\tau_{yz} \cdot a_z)^2 + 2 \cdot (\tau_{yx} \cdot a_x) \cdot (\sigma_y \cdot a_y) + 2 \cdot (\tau_{yx} \cdot a_x) \cdot (\tau_{yz} \cdot a_z) + 2 \cdot (\tau_{yz} \cdot a_z) \cdot (\sigma_y \cdot a_y)] \\ p_{nz}^2 &= [(\tau_{zx} \cdot a_x)^2 + (\tau_{zy} \cdot a_y)^2 + (\sigma_z \cdot a_z)^2 + 2 \cdot (\tau_{zx} \cdot a_x) \cdot (\tau_{zy} \cdot a_y) + 2 \cdot (\tau_{zx} \cdot a_x) \cdot (\sigma_z \cdot a_z) + 2 \cdot (\sigma_z \cdot a_z) \cdot (\tau_{zy} \cdot a_y)] \\ \sigma_n^2 &= [\sigma_x \cdot a_x^2]^2 + [(\tau_{xy} + \tau_{yx}) \cdot a_y \cdot a_x]^2 + [(\tau_{xz} + \tau_{zx}) \cdot a_z \cdot a_x]^2 + \\ &+ [(\tau_{yz} + \tau_{zy}) \cdot a_z \cdot a_y]^2 + [\sigma_y \cdot a_y^2]^2 + [\sigma_z \cdot a_z^2]^2 + 2 \cdot [\sigma_x \cdot a_x^2] \cdot [\sigma_z \cdot a_z^2] + \\ &+ 2 \cdot [\sigma_x \cdot a_x^2] \cdot [(\tau_{xy} + \tau_{yx}) \cdot a_y \cdot a_x] + 2 \cdot [\sigma_x \cdot a_x^2] \cdot [(\tau_{xz} + \tau_{zx}) \cdot a_z \cdot a_x] + \\ &+ 2 \cdot [\sigma_x \cdot a_x^2] \cdot [(\tau_{yz} + \tau_{zy}) \cdot a_z \cdot a_y] + 2 \cdot [\sigma_y \cdot a_y^2] \cdot [(\tau_{xy} + \tau_{yx}) \cdot a_y \cdot a_x] + \\ &+ 2 \cdot [\sigma_y \cdot a_y^2] \cdot [(\tau_{xz} + \tau_{zx}) \cdot a_z \cdot a_x] + 2 \cdot [\sigma_y \cdot a_y^2] \cdot [(\tau_{yz} + \tau_{zy}) \cdot a_z \cdot a_y] + \\ &+ 2 \cdot [\sigma_z \cdot a_z^2] \cdot [(\tau_{xy} + \tau_{yx}) \cdot a_y \cdot a_x] + 2 \cdot [\sigma_z \cdot a_z^2] \cdot [(\tau_{xz} + \tau_{zx}) \cdot a_z \cdot a_x] + \\ &+ 2 \cdot [\sigma_z \cdot a_z^2] \cdot [(\tau_{yz} + \tau_{zy}) \cdot a_z \cdot a_y] + 2 \cdot [(\tau_{xy} + \tau_{yx}) \cdot a_y \cdot a_x] \cdot \\ &+ [(\tau_{xz} + \tau_{zx}) \cdot a_z \cdot a_x] + 2 \cdot [(\tau_{xy} + \tau_{yx}) \cdot a_y \cdot a_x] \cdot [(\tau_{yz} + \tau_{zy}) \cdot a_z \cdot a_y] + \\ &+ 2 \cdot [(\tau_{xz} + \tau_{zx}) \cdot a_z \cdot a_x] \cdot [(\tau_{yz} + \tau_{zy}) \cdot a_z \cdot a_y]\end{aligned}$$

Контактное касательное напряжение скомбинируем таким образом, чтобы нормальные напряжения были в первой фигурной скобке, произведение нормальных и касательных напряжений

во второй фигурной скобке, квадраты касательных напряжений в третьей фигурной скобке. После подстановки и перегруппировки получим

$$\begin{aligned}\tau_n^2 &= p^2 - \sigma_n^2 = \{[\sigma_x \cdot a_x]^2 - [\sigma_x \cdot a_x^2]^2 + (\sigma_y \cdot a_y)^2 - [\sigma_y \cdot a_y^2]^2 + (\sigma_z \cdot a_z)^2 - [\sigma_z \cdot a_z^2]^2 - \\ &- 2(\sigma_x \cdot a_x) \cdot (\sigma_y \cdot a_y) - 2(\sigma_x \cdot a_x) \cdot (\sigma_z \cdot a_z) - 2(\sigma_z \cdot a_z) \cdot (\sigma_y \cdot a_y)\} + \\ &+ \{2 \cdot (\sigma_x \cdot a_x) \cdot (\tau_{xy} \cdot a_y) + 2 \cdot (\sigma_x \cdot a_x) \cdot (\tau_{xz} \cdot a_z) + 2 \cdot (\sigma_y \cdot a_y) \cdot (\tau_{yx} \cdot a_x) + \\ &+ 2 \cdot (\sigma_z \cdot a_z) \cdot (\tau_{zx} \cdot a_x) + 2 \cdot (\sigma_z \cdot a_z) \cdot (\tau_{zy} \cdot a_y) + \\ &+ 2 \cdot (\sigma_y \cdot a_y) \cdot (\tau_{yz} \cdot a_z) - 2(\sigma_x \cdot a_x^2) \cdot [(\tau_{xy} + \tau_{yx}) \cdot a_y \cdot a_x] - 2(\sigma_x \cdot a_x^2) \cdot \\ &\cdot [(\tau_{xz} + \tau_{zx}) \cdot a_z \cdot a_x] - 2(\sigma_y \cdot a_y^2) \cdot [(\tau_{yz} + \tau_{zy}) \cdot a_z \cdot a_y] - 2(\sigma_z \cdot a_z^2) \cdot [(\tau_{xy} + \tau_{yx}) \cdot a_y \cdot a_x] - \\ &- 2(\sigma_z \cdot a_z^2) \cdot [(\tau_{xz} + \tau_{zx}) \cdot a_z \cdot a_x] - 2(\sigma_y \cdot a_y^2) \cdot [(\tau_{yz} + \tau_{zy}) \cdot a_z \cdot a_y]\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \cdot [(\tau_{xz} + \tau_{zx}) \cdot a_z \cdot a_x] - 2(\sigma_x \cdot a_x^2) \cdot [(\tau_{yz} + \tau_{zy}) \cdot a_z \cdot a_y] - \\
& 2(\sigma_y \cdot a_y^2) \cdot [(\tau_{xy} + \tau_{yx}) \cdot a_y \cdot a_x] - 2(\sigma_y \cdot a_y^2) \cdot [(\tau_{xz} + \tau_{zx}) \cdot a_z \cdot a_x] - \\
& - 2(\sigma_y \cdot a_y^2) \cdot [(\tau_{yz} + \tau_{zy}) \cdot a_z \cdot a_y] - 2(\sigma_z \cdot a_z^2) \cdot [(\tau_{xy} + \tau_{yx}) \cdot a_y \cdot a_x] - \\
& - 2(\sigma_z \cdot a_z^2) \cdot [(\tau_{xz} + \tau_{zx}) \cdot a_z \cdot a_x] - 2(\sigma_z \cdot a_z^2) \cdot [(\tau_{yz} + \tau_{zy}) \cdot a_z \cdot a_y] + \\
& + \{(\tau_{yx} \cdot a_x)^2 + (\tau_{zx} \cdot a_x)^2 + (\tau_{yz} \cdot a_z)^2 + (\tau_{zy} \cdot a_y)^2 + (\tau_{xz} \cdot a_z)^2 + (\tau_{xy} \cdot a_y)^2 + \\
& + 2(\tau_{xy} \cdot a_y) \cdot (\tau_{xz} \cdot a_z) + 2(\tau_{yx} \cdot a_x) \cdot (\tau_{yz} \cdot a_z) + 2(\tau_{zx} \cdot a_x) \cdot (\tau_{zy} \cdot a_y) - \\
& - 2[(\tau_{xy} + \tau_{yx}) \cdot a_y \cdot a_x] \cdot [(\tau_{xz} + \tau_{zx}) \cdot a_z \cdot a_x] - 2[(\tau_{xy} + \tau_{yx}) \cdot a_y \cdot a_x] \cdot \\
& \cdot [(\tau_{yz} + \tau_{zy}) \cdot a_z \cdot a_y] - 2[(\tau_{xz} + \tau_{zx}) \cdot a_z \cdot a_x] \cdot [(\tau_{yz} + \tau_{zy}) \cdot a_z \cdot a_y] - \\
& - [(\tau_{yx} + \tau_{yx}) \cdot a_y \cdot a_x]^2 - [(\tau_{zx} + \tau_{zx}) \cdot a_z \cdot a_x]^2 - [(\tau_{zy} + \tau_{zy}) \cdot a_y \cdot a_z]^2 \};
\end{aligned}$$

Рассмотрим каждую фигурную скобку отдельно. упорядоченность в выражениях. Первая фигурная
Группируя и анализируя можно показать, что в каждой скобка имеет вид
фигурной скобке просматривается некоторая

$$\{1\} = \{a_x^2 \cdot a_y^2 (\sigma_x - \sigma_y)^2 + a_x^2 \cdot a_z^2 (\sigma_x - \sigma_z)^2 + a_y^2 \cdot a_z^2 (\sigma_y - \sigma_z)^2\};$$

вторая

$$\begin{aligned}
\{2\} = & \{2a_x a_y \langle (\sigma_x - \sigma_y) \cdot (\tau_{xy} a_y^2 - \tau_{yx} a_x^2) + a_z^2 [(\sigma_x - \sigma_z) \tau_{xy} + (\sigma_y - \sigma_z) \tau_{yx}] + \\
& + 2a_x a_z \langle (\sigma_x - \sigma_z) \cdot (\tau_{xz} a_z^2 - \tau_{zx} a_x^2) + a_y^2 [(\sigma_x - \sigma_y) \tau_{xz} + (\sigma_z - \sigma_y) \tau_{yx}] + \\
& + 2a_y a_z \langle (\sigma_y - \sigma_z) \cdot (\tau_{yz} a_z^2 - \tau_{zy} a_y^2) + a_x^2 [(\sigma_y - \sigma_x) \tau_{yz} + (\sigma_z - \sigma_x) \tau_{zy}] \rangle \};
\end{aligned}$$

третья

$$\begin{aligned}
\{3\} = & \{a_y^2 \cdot [\tau_{xy}^2 - (\tau_{xy} + \tau_{yx})^2 \cdot a_x^2] + a_z^2 \cdot [\tau_{xz}^2 - (\tau_{xz} + \tau_{zx})^2 \cdot a_x^2] + a_z^2 \cdot [\tau_{yz}^2 - (\tau_{yz} + \tau_{zy})^2 \cdot a_y^2] + \tau_{yx}^2 a_x^2 + \tau_{zx}^2 a_x^2 + \tau_{zy}^2 a_y^2 + \\
& + 2a_y a_z [\tau_{xy} \cdot \tau_{xz} - (\tau_{xy} + \tau_{yx}) \cdot (\tau_{xz} + \tau_{zx}) a_x^2] + 2a_x a_z [\tau_{yx} \cdot \tau_{yz} - (\tau_{xy} + \tau_{yx}) \cdot (\tau_{zy} + \tau_{yz}) a_y^2] + \\
& + 2a_x a_y [\tau_{zx} \cdot \tau_{zy} - (\tau_{xz} + \tau_{zx}) \cdot (\tau_{zy} + \tau_{yz}) a_z^2] \};
\end{aligned}$$

Перегруппировывая выражения еще раз, получим

$$\begin{aligned}
\tau_n^2 = p^2 - \sigma_n^2 = & \{a_x^2 \cdot a_y^2 (\sigma_x - \sigma_y)^2 + a_x^2 \cdot a_z^2 (\sigma_x - \sigma_z)^2 + a_y^2 \cdot a_z^2 (\sigma_y - \sigma_z)^2\} + \\
& + \{2a_x a_y \langle (\sigma_x - \sigma_y) \cdot (\tau_{xy} a_y^2 - \tau_{yx} a_x^2) + a_z^2 [(\sigma_x - \sigma_z) \tau_{xy} + (\sigma_y - \sigma_z) \tau_{yx}] + \\
& + 2a_x a_z \langle (\sigma_x - \sigma_z) \cdot (\tau_{xz} a_z^2 - \tau_{zx} a_x^2) + a_y^2 [(\sigma_x - \sigma_y) \tau_{xz} + (\sigma_z - \sigma_y) \tau_{yx}] + \\
& + 2a_y a_z \langle (\sigma_y - \sigma_z) \cdot (\tau_{yz} a_z^2 - \tau_{zy} a_y^2) + a_x^2 [(\sigma_y - \sigma_x) \tau_{yz} + (\sigma_z - \sigma_x) \tau_{zy}] \rangle + \\
& + \{(\tau_{xy} a_y^2 - \tau_{xz} a_x^2) + a_z (\tau_{xz} a_y - \tau_{yz} a_x)\}^2 + \{(\tau_{yz} a_z^2 - \tau_{zy} a_y^2) + \\
& + a_x (\tau_{yx} a_y - \tau_{zx} a_x)\}^2 + \{(\tau_{xz} a_z^2 - \tau_{zx} a_x^2) + a_y (\tau_{xy} a_z - \tau_{yx} a_y)\}^2 \};
\end{aligned} \quad (1)$$

Достаточно громоздкое выражение (1), после приведения принимает приемлемый для анализа вид

$$\begin{aligned}
\tau_n^2 = p^2 - \sigma_n^2 = & \{a_x \cdot a_y (\sigma_x - \sigma_y) + [(\tau_{xy} \cdot a_y^2 - \tau_{yx} \cdot a_x^2) + a_z \cdot (\tau_{xz} a_y - \tau_{yz} a_x)]\}^2 + \\
& + \{a_x \cdot a_z (\sigma_x - \sigma_z) + [(\tau_{xz} \cdot a_z^2 - \tau_{zx} \cdot a_x^2) + a_y \cdot (\tau_{xy} a_z - \tau_{yx} a_y)]\}^2 + \\
& + \{a_y \cdot a_z (\sigma_y - \sigma_z) + [(\tau_{yz} \cdot a_z^2 - \tau_{zy} \cdot a_y^2) + a_x \cdot (\tau_{yx} a_z - \tau_{zx} a_y)]\}^2.
\end{aligned} \quad (2)$$

Выражение (2), для контактного касательного тогда составляющие контактных касательных
напряжения можно представить в виде суммы напряжений
квадратов

$$\tau_n^2 = \tau_{nxy}^2 + \tau_{nyz}^2 + \tau_{nzx}^2,$$

$$\begin{aligned}\tau_{nxy} &= \pm \{a_x \cdot a_y (\sigma_x - \sigma_y) + [\tau_{xy} \cdot a_y^2 - \tau_{yx} \cdot a_x^2] + a_z \cdot (\tau_{xz} a_y - \tau_{yz} a_x)\}, \\ \tau_{nzx} &= \pm \{a_x \cdot a_z (\sigma_x - \sigma_z) + [\tau_{xz} \cdot a_z^2 - \tau_{zx} \cdot a_x^2] + a_y \cdot (\tau_{xy} a_z - \tau_{zy} a_x)\}, \\ \tau_{nyz} &= \pm \{a_y \cdot a_z (\sigma_y - \sigma_z) + [\tau_{yz} \cdot a_z^2 - \tau_{zy} \cdot a_y^2] + a_x \cdot (\tau_{yx} a_z - \tau_{zx} a_y)\}.\end{aligned}\quad (3)$$

Из полученных значений (3) видно, что кроме напряжений соответствующих плоскостей присутствуют касательные напряжения смежных граней. Следует обратить внимание на различие касательных напряжений с одинаковыми нижними индексами, но с разной последовательностью

подстановки. Если в этом есть необходимость, то указанные касательные напряжения можно прировнять друг другу, например $\tau_{xy} = \tau_{yx}$; $\tau_{yz} = \tau_{zy}$; $\tau_{zx} = \tau_{xz}$, тогда

$$\begin{aligned}\tau_{nxy} &= \pm \{a_x \cdot a_y (\sigma_x - \sigma_y) + [\tau_{xy} \cdot (a_y^2 - a_x^2) + a_z \cdot (\tau_{xz} a_y - \tau_{yz} a_x)]\}, \\ \tau_{nzx} &= \pm \{a_x \cdot a_z (\sigma_x - \sigma_z) + [\tau_{zx} \cdot (a_z^2 - a_x^2) + a_y \cdot (\tau_{xy} a_z - \tau_{zy} a_x)]\}, \\ \tau_{nyz} &= \pm \{a_y \cdot a_z (\sigma_y - \sigma_z) + [\tau_{yz} \cdot (a_z^2 - a_y^2) + a_x \cdot (\tau_{yx} a_z - \tau_{zx} a_y)]\}.\end{aligned}\quad (4)$$

Если задача решается в одной плоскости, тогда выражения (3), (4) упрощаются и принимают вид (4), (5)

$$\begin{aligned}\tau_{nxy} &= \pm \{a_x \cdot a_y (\sigma_x - \sigma_y) + [\tau_{xy} \cdot (a_y^2 - a_x^2)]\}, \\ \tau_{nzx} &= \pm \{a_x \cdot a_z (\sigma_x - \sigma_z) + [\tau_{zx} \cdot (a_z^2 - a_x^2)]\}, \\ \tau_{nyz} &= \pm \{a_y \cdot a_z (\sigma_y - \sigma_z) + [\tau_{yz} \cdot (a_z^2 - a_y^2)]\}.\end{aligned}\quad (5)$$

Для примера в выражениях рассмотрим плоскость xu . Имеем

$$a_x = (n, x), a_y = \cos(n, y) = \sin(n, x).$$

Подставляя, получим

$$\tau_n^2 = \{a_1 \cdot a_2 (\sigma_1 - \sigma_2)\}^2 + \{a_1 \cdot a_3 (\sigma_1 - \sigma_3)\}^2 + \{a_2 \cdot a_3 (\sigma_2 - \sigma_3)\}^2.$$

Используя последнее выражение можно найти напряжения на диагональной площадке после задания ее координат, к примеру

$$a_3 = 0; a_1 = a_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}; \tau_{12} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}, \text{ и т.д.}$$

Октаэдрическое касательное напряжение определяется, если задать значения параметров, показывающих ее положение в пространстве, действительно

$$a_3 = a_1 = a_2 = a = \frac{1}{\sqrt{3}}; \text{ тогда}$$

$$\tau_{окт} = \frac{1}{3} \sqrt{\{(\sigma_1 - \sigma_2)\}^2 + \{(\sigma_1 - \sigma_3)\}^2 + \{(\sigma_2 - \sigma_3)\}^2}.$$

$$a_y^2 - a_x^2 = \sin^2(n, x) - \cos^2(n, x) = -\cos 2(n, x);$$

$$a_x \cdot a_y = \frac{\sin 2(n, x)}{2}.$$

Используя показанные соотношения, имеем

$$\tau_n = \pm \left\{ \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cdot \sin 2(n, x) - \tau_{xy} \cdot \cos 2(n, x) \right\}.$$

Это случай плоской задачи. При подстановке соответствующих значений углов последние выражения приводятся к известным формулам. Их можно применять при решении плоских задач механики сплошной среды, как граничные условия в напряжениях. Если площадки главные, тогда напряжение, (2), на наклонной площадке имеет вид

С целью конкретизации выражений (3),(4) необходимо выразить направляющие косинусы и разности их квадратов, через одинаковые аргументы тригонометрических функций. Следует установить аналитическую связь между направляющими косинусами и вводимыми в рассмотрение дополнительными углами. На рис. 1 представлено разложение радиус вектора на составляющие по координатным осям, обозначены направляющие косинусы и дополнительные углы.

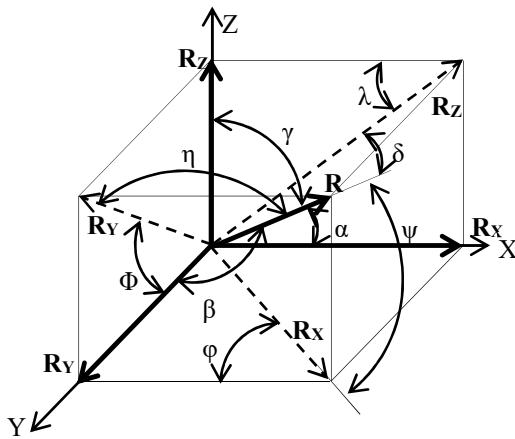


Рис.1 – Схема расположения углов при определении направляющих косинусов. Из построения определяются проекции вектора, с использованием направляющих косинусов, т.е.

$$R_x = R \cdot \cos \alpha = R \cdot a_x; \quad R_y = R \cdot \cos \beta = R \cdot a_y; \\ R_z = R \cdot \cos \gamma = R \cdot a_z.$$

При этом

$$R_{xy} = R \cdot \cos \psi; \quad R_{yz} = R \cdot \cos \eta; \quad R_{zx} = R \cdot \cos \delta,$$

где R_{xy} , R_{yz} , R_{zx} – проекции вектора на плоскости xy , yz , zx ;

ψ , η , δ – углы между вектором и его проекциями на соответствующие плоскости.

Рассмотрим плоскость xy . Определяем проекции вектора на оси X и Y в пределах своей плоскости, т.е.

$$R_x = R_{xy} \cdot \cos \phi; \quad \text{или} \quad R_x = R \cdot \cos \psi \cdot \cos \phi,$$

тогда

$$R_x = R \cdot \cos \alpha = R \cdot \cos \psi \cdot \cos \phi; \\ a_x = \cos \alpha = \cos \psi \cdot \cos \phi. \quad (6)$$

$$R_y = R_{xy} \cdot \sin \phi; \quad \text{или} \quad R_y = R \cdot \cos \psi \cdot \sin \phi;$$

тогда

$$R_y = R \cdot \cos \beta = R \cdot \cos \psi \cdot \sin \phi; \\ a_y = \cos \beta = \cos \psi \cdot \sin \phi. \quad (7)$$

Разность квадратов направляющих косинусов для первой круглой скобки в выражении для контактного касательного напряжения, с учетом (6), (7)

$$a_y^2 - a_x^2 = \cos^2 \beta - \cos^2 \alpha = (\cos \psi \sin \phi)^2 - (\cos \psi \cos \phi)^2 = \\ = -\cos^2 \psi \cos 2\phi.$$

Произведение направляющих косинусов

$$a_x \cdot a_y = (\cos \alpha) \cdot (\cos \beta) = (\cos \psi \cdot \cos \phi) \cdot (\cos \psi \cdot \sin \phi) = \\ = \cos^2 \psi \cdot \frac{\sin 2\phi}{2}.$$

Рассмотрим плоскость yz .

Определяем проекции вектора на оси Y и Z в пределах своей плоскости, т.е.

$$R_y = R_{yz} \cdot \cos \phi; \quad R_{yz} = R \cdot \cos \eta;$$

или

$$R_y = R \cdot \cos \eta \cdot \cos \phi;$$

$$R_y = R \cdot \cos \beta = R \cdot \cos \eta \cdot \cos \phi;$$

$$a_y = \cos \beta = \cos \eta \cdot \cos \phi. \quad (8)$$

$$R_z = R_{yz} \cdot \sin \phi; \quad \text{или} \quad R_z = R \cdot \cos \eta \cdot \sin \phi;$$

тогда

$$R_z = R \cdot \cos \gamma = R \cdot \cos \eta \cdot \sin \phi; \\ a_z = \cos \gamma = \cos \eta \cdot \sin \phi. \quad (9)$$

Разность квадратов направляющих косинусов для второй круглой скобки в выражении для контактного касательного напряжения

$$a_z^2 - a_y^2 = \cos^2 \gamma - \cos^2 \beta = (\cos \eta \sin \phi)^2 - (\cos \eta \cos \phi)^2 = \\ = -\cos^2 \eta \cdot \cos 2\phi.$$

Произведение направляющих косинусов

$$a_z \cdot a_y = (\cos \gamma) \cdot (\cos \beta) = (\cos \eta \cdot \sin \phi) \cdot (\cos \eta \cdot \cos \phi) = \\ = \cos^2 \eta \cdot \frac{\sin 2\phi}{2}.$$

Рассмотрим плоскость zx .

Определяем проекции вектора на оси z и x , в пределах своей плоскости, т.е.

$$R_z = R_{zx} \cdot \sin \lambda; \quad R_{zx} = R \cdot \cos \delta; \quad \text{или}$$

$$R_z = R \cdot \cos \delta \cdot \sin \lambda;$$

$$R_z = R \cdot \cos \gamma = R \cdot \cos \delta \cdot \sin \lambda;$$

$$a_z = \cos \gamma = \cos \delta \cdot \sin \lambda. \quad (10)$$

$$R_x = R_{zx} \cdot \cos \lambda; \quad \text{или} \quad R_x = R \cdot \cos \delta \cdot \cos \lambda; \quad \text{тогда}$$

$$R_x = R \cdot \cos \alpha = R \cdot \cos \delta \cdot \cos \lambda;$$

$$a_x = \cos \alpha = \cos \delta \cdot \cos \lambda. \quad (11)$$

Разность квадратов направляющих косинусов для третьей круглой скобки в выражении для контактного касательного напряжения

$$a_z^2 - a_x^2 = \cos^2 \gamma - \cos^2 \alpha = (\cos \delta \cdot \sin \lambda)^2 - (\cos \delta \cdot \cos \lambda)^2 = \\ = -\cos^2 \delta \cdot \cos 2\lambda.$$

Произведение направляющих косинусов

$$a_z \cdot a_x = (\cos \gamma) \cdot (\cos \alpha) = (\cos \delta \cdot \sin \lambda) \cdot (\cos \delta \cdot \cos \lambda) = \\ = \cos^2 \delta \cdot \frac{\sin 2\lambda}{2}.$$

Подставим значения направляющих косинусов (6)...(11) в выражения для контактных касательных напряжений, получим

$$\begin{aligned} \tau_{nxy} &= \pm \cos \psi \left\{ \frac{\sin 2\varphi}{2} (\sigma_x - \sigma_y) + \left[(\tau_{xy} \cdot \sin^2 \varphi - \tau_{yx} \cdot \cos^2 \varphi) + a_z \cdot (\tau_{xz} \sin \varphi - \tau_{yz} \cos \varphi) \right] \right\}; \\ \tau_{nxx} &= \pm \cos \delta \left\{ \frac{\sin 2\lambda}{2} (\sigma_x - \sigma_z) + \left[(\tau_{xz} \cdot \sin^2 \lambda - \tau_{zx} \cdot \cos^2 \lambda) + a_y \cdot (\tau_{xy} \cdot \sin \lambda - \tau_{zy} \cdot \cos \lambda) \right] \right\}; \\ \tau_{nyz} &= \pm \cos \eta \left\{ \frac{\sin 2\phi}{2} (\sigma_y - \sigma_z) + \left[(\tau_{yz} \cdot \sin^2 \phi - \tau_{zy} \cdot \cos^2 \phi) + a_x \cdot (\tau_{yx} \sin \phi - \tau_{zx} \cos \phi) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (12)$$

В общей записи имеем

$$\begin{aligned} \tau_n^2 &= \cos^2 \psi \left\{ \frac{\sin 2\varphi}{2} (\sigma_x - \sigma_y) + \left[(\tau_{xy} \cdot \sin^2 \varphi - \tau_{yx} \cdot \cos^2 \varphi) + a_z \cdot (\tau_{xz} \sin \varphi - \tau_{yz} \cos \varphi) \right] \right\}^2 + \\ &+ \cos^2 \delta \left\{ \frac{\sin 2\lambda}{2} (\sigma_x - \sigma_z) + \left[(\tau_{xz} \cdot \sin^2 \lambda - \tau_{zx} \cdot \cos^2 \lambda) + a_y \cdot (\tau_{xy} \cdot \sin \lambda - \tau_{zy} \cdot \cos \lambda) \right] \right\}^2 + \\ &+ \cos^2 \eta \left\{ \frac{\sin 2\phi}{2} (\sigma_y - \sigma_z) + \left[(\tau_{yz} \cdot \sin^2 \phi - \tau_{zy} \cdot \cos^2 \phi) + a_x \cdot (\tau_{yx} \sin \phi - \tau_{zx} \cos \phi) \right] \right\}^2. \end{aligned} \quad (13)$$

Анализ формул (12), (13) показывает, что в граничных условиях по направлениям присутствуют все составляющие касательных напряжений, используемых в пространственном решении. Это достаточно принципиальное отличие от плоской задачи, когда касательные напряжения показаны в граничных условиях только для одной плоскости. Однако такая постановка задачи усложняет решение, так как в одно выражение входит несколько неизвестных переменных. Рационально приблизить составляющие касательных напряжений к плоской задаче.

Принимая условия в (3)

$$\begin{aligned} a_z \cdot (\tau_{xz} a_y - \tau_{yz} a_x) &\approx 0; \quad a_y \cdot (\tau_{xy} a_z - \tau_{zy} a_x) \approx 0; \\ a_x \cdot (\tau_{yx} a_z - \tau_{zx} a_y) &\approx 0, \end{aligned}$$

получаем упрощенные зависимости для граничных условий, представленных в напряжениях, т.е.

$$\begin{aligned} \tau_{nx} &= \pm \left\{ a_x \cdot a_y (\sigma_x - \sigma_y) + \left[(\tau_{xy} \cdot a_y^2 - \tau_{yx} \cdot a_x^2) \right] \right\}; \\ \tau_{ny} &= \pm \left\{ a_x \cdot a_z (\sigma_x - \sigma_z) + \left[(\tau_{xz} \cdot a_z^2 - \tau_{zx} \cdot a_x^2) \right] \right\}; \\ \tau_{nz} &= \pm \left\{ a_y \cdot a_z (\sigma_y - \sigma_z) + \left[(\tau_{yz} \cdot a_z^2 - \tau_{zy} \cdot a_y^2) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (14)$$

Последняя запись для составляющих граничных условий (14), формально соответствует плоской задаче. В соответствии с последними выражениями касательное напряжение τ_n будет иметь вид

$$\begin{aligned} \tau_n^2 &= \left\{ a_x \cdot a_y (\sigma_x - \sigma_y) + \left[(\tau_{xy} \cdot a_y^2 - \tau_{yx} \cdot a_x^2) \right] \right\}^2 + \\ &+ \left\{ a_x \cdot a_z (\sigma_x - \sigma_z) + \left[(\tau_{xz} \cdot a_z^2 - \tau_{zx} \cdot a_x^2) \right] \right\}^2 + \\ &+ \left\{ a_y \cdot a_z (\sigma_y - \sigma_z) + \left[(\tau_{yz} \cdot a_z^2 - \tau_{zy} \cdot a_y^2) \right] \right\}^2. \end{aligned}$$

Если $\tau_{xy} = \tau_{yx}$, $\tau_{yz} = \tau_{zy}$, $\tau_{zx} = \tau_{xz}$, тогда

$$\begin{aligned} \tau_n^2 &= \left\{ a_x \cdot a_y (\sigma_x - \sigma_y) + \left[\tau_{xy} \cdot (a_y^2 - a_x^2) \right] \right\}^2 + \\ &+ \left\{ a_x \cdot a_z (\sigma_x - \sigma_z) + \left[\tau_{xz} \cdot (a_z^2 - a_x^2) \right] \right\}^2 + \\ &+ \left\{ a_y \cdot a_z (\sigma_y - \sigma_z) + \left[\tau_{yz} \cdot (a_z^2 - a_y^2) \right] \right\}^2. \end{aligned} \quad (15)$$

Подставляя направляющие косинусы (6)...(11) в (15), для контактного касательного напряжения можно записать

$$\begin{aligned} \tau_n^2 &= \cos^2 \psi \cdot \left\{ \frac{\sin 2\varphi}{2} (\sigma_x - \sigma_y) - \left[\tau_{xy} \cdot \cos 2\varphi \right] \right\}^2 + \\ &+ \cos^2 \delta \cdot \left\{ \frac{\sin 2\lambda}{2} (\sigma_x - \sigma_z) - \left[\tau_{xz} \cdot \cos 2\lambda \right] \right\}^2 + \\ &+ \cos^2 \eta \cdot \left\{ \frac{\sin 2\phi}{2} (\sigma_y - \sigma_z) - \left[\tau_{yz} \cdot \cos 2\phi \right] \right\}^2. \end{aligned} \quad (16)$$

Выражения для составляющих касательных контактных напряжений

$$\begin{aligned} \tau_{nxy} &= \pm \cos \psi \cdot \left\{ \frac{\sin 2\varphi}{2} (\sigma_x - \sigma_y) - \left[\tau_{xy} \cdot \cos 2\varphi \right] \right\}; \\ \tau_{nxx} &= \pm \cos \delta \cdot \left\{ \frac{\sin 2\lambda}{2} (\sigma_x - \sigma_z) - \left[\tau_{xz} \cdot \cos 2\lambda \right] \right\}; \\ \tau_{nyz} &= \pm \cos \eta \cdot \left\{ \frac{\sin 2\phi}{2} (\sigma_y - \sigma_z) - \left[\tau_{yz} \cdot \cos 2\phi \right] \right\}, \end{aligned} \quad (17)$$

где φ , λ , ϕ – углы, расположенные в плоскостях xy , zx , yz , между проекциями вектора на плоскости и соответствующими координатными осями. Следует отметить, что предложенные выше формулы не являются плоскими решениями задачи, это возможно тогда, когда косинусы $\cos \psi, \cos \delta, \cos \eta$ равны единице.

Если в выражениях (16)...(17) возможны варианты, когда

$$\begin{aligned}\tau_{xy} &= T_{ix} \cdot \sin A_1 \Phi_1; \quad \sigma_x - \sigma_y = 2 \cdot T_{ix} \cdot \cos A_1 \Phi_1; \\ \tau_{yz} &= T_{iy} \cdot \sin A_2 \Phi_2; \quad \sigma_y - \sigma_z = 2 \cdot T_{iy} \cdot \cos A_2 \Phi_2; \\ \tau_{zx} &= T_{iz} \cdot \sin A_3 \Phi_3; \quad \sigma_x - \sigma_z = 2 \cdot T_{iz} \cdot \cos A_3 \Phi_3, \quad (18)\end{aligned}$$

где T_{ix}, T_{iy}, T_{iz} – значения обобщенных характеристик напряженного состояния в направлении осей x, y, z ; $A_1 \Phi_1, A_2 \Phi_2, A_3 \Phi_3$ – аргумент функции, определяемые координатными переменными очага деформации.

Тогда после подстановки (18) в (16), (17) получим следующее

$$\begin{aligned}\tau_n^2 &= T_{ix}^2 \cdot \cos^2 \psi \cdot \sin^2(A_1 \Phi_1 - 2\varphi) \\ &+ T_{iy}^2 \cdot \cos^2 \eta \cdot \sin^2(A_2 \Phi_2 - 2\phi) + \\ &+ T_{iz}^2 \cdot \cos^2 \delta \cdot \sin^2(A_3 \Phi_3 - 2\lambda); \quad (19)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tau_{nxy} &= T_{ix} \cdot \cos \psi \cdot \sin(A_1 \Phi_1 - 2\varphi), \\ \tau_{nyz} &= T_{iy} \cdot \cos \eta \cdot \sin(A_2 \Phi_2 - 2\phi), \\ \tau_{nxx} &= T_{iz} \cdot \cos \delta \cdot \sin(A_3 \Phi_3 - 2\lambda). \quad (20)\end{aligned}$$

Такие подходы уже известны при решении плоских задач теории упругости и пластичности, [6]. Представляет интерес их использовать при решении пространственной задачи механики сплошной среды. Выражения (19), (20) в сравнении с (4), (12), (13), (14), (15) значительно упростились, что позволяет их наглядно использовать для анализа и более обоснованного выбора решения пространственной задачи. Однако принятие условия (18) должно быть подтверждено данными об их реальности [7], и целесообразности использования в решении объемной задачи механики сплошной среды.

Выводы:

1. Показаны обобщающие подходы получения аналитических зависимостей граничных условий пространственной задачи механики сплошной среды.

2. Получены аналитические выражения для определения контактных касательных напряжений объемной задачи.

3. Показана возможность использования тригонометрической подстановки в объемной задаче механики сплошной среды.

Список литературы

1. Безухов Н.И. Основы теории упругости, пластичности и ползучести / Безухов Н.И. – Высшая школа, 1968. – 498 с. (с ил.).
2. Соколовский В.В. Теория пластичности / Соколовский В.В. – М.: Высшая школа, 1962. – 608 с.
3. Nadai A. Handbush der Physik. Bd – 2. Berlin, 1928.
4. Качанов Л.М. Основы теории пластичности / Качанов Л.М. – М.: Наука, 1969. – 419 с.
5. Чигиринский В.В. Граничные условия в решениях прикладных задач теории пластичности. Збірник наукових праць Дніпровського державного техн-го ун-ту, Вип.1(32), Кам'янське, 2018, С.33...41.
6. Чигиринский В.В. Производство высокоэффективного металлопроката / Чигиринский В.В., Мазур В.Л., Леготкин Г.И., Слепынин А.Г., Шевченко Т.Г. – Днепропетровск. РВА "Дніпро-ВАЛ", 2006. – 261 с.
7. Клименко П.Л. Контактные напряжения при прокатке / Клименко П.Л., Данченко В.Н. – Днепропетровск: «ПОРОГИ», 2007. – 285 с.

References (transliterated)

1. Bezuhov N.I. Osnovy teorii uprugosti, plastichnosti i polzuchesti / Bezuhov N.I. – Vysshaya shkola, 1968. – 498 p. (s il.).
2. Sokolovskij V.V. Teoriya plastichnosti / Sokolovskij V.V. – Moscow: Vysshaya shkola, 1962. – 608 p.
3. Nadai A. Handbush der Physik. Bd – 2. Berlin, 1928.
4. Kachanov L.M. Osnovy teorii plastichnosti / Kachanov L.M. – Moscow: Nauka, 1969. – 419 p.
5. Chigirinskij V.V. Granichnye usloviya v resheniyah prikladnyh zadach teorii plastichnosti. Zbirnik naukovih prac Dniprovskogo derzhavnogo tehn-go un-tu, Vol.1(32), Kam'yanske, 2018, p.33...41.
6. Chigirinskij V.V. Proizvodstvo vysokoeffektivnogo metalloprokata / Chigirinskij V.V., Mazur V.L., Legotkin G.I., Slepynin A.G., Shevchenko T.G. – Dnepropetrovsk. RVA "Dnipro-VAL", 2006. – 261 p.
8. Klimenko P.L. Kontaktnye napryazheniya pri prokatke / Klimenko P.L., Danchenko V.N. – Dnepropetrovsk: «POROGI», 2007. – 285 p.

Поступила (received) 20.09.2019

Відомості про авторів / Сведения об авторах / About the Authors

Чигиринский Валерий Викторович (Чигиринський Валерій Вікторович, Chigirinsky Valeriy) – доктор технических наук, профессор, предприятие «Обод», КрКЗ, помощник руководителя Кременчугского колесного завода, г. Кременчуг, Украина. ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-5887-2747>, e-mail: val.chig1948@gmail.com

Науменко Елена Геннадиевна (Науменко Олена Геннадіївна, Naumenko Elena) – НТУ «Днепропетровская политехника», старший преподаватель кафедры строительной, теоретической и прикладной механики, г. Днепр, Украина. ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-9532-1493>, e-mail: elenanaumenko1971@gmail.com

Бренер Виктор Александрович (Бренер Віктор Олександрович, Brenner Victor) – ПАО «Институт титана», генеральный директор, г. Запорожье, Украина, e-mail: common@timag.org